



TESOURO NACIONAL

REVISTA
CADERNOS DE
FINANÇAS PÚBLICAS
02 | 2022

Apoio:



Impactos da Credibilidade do Banco Central sobre a Gestão da Dívida Pública

Daniel Viana de Sá Earp

Resumo

Este trabalho busca analisar, através de uma solução parcial de um modelo analítico, como a credibilidade do Banco Central – isto é, os agentes efetivamente acreditam que a inflação ex-post será igual à ex-ante – como impacta na decisão de formulação de portfólio de títulos públicos dos agentes privados. A análise histórica e empírica do caso brasileiro busca validar os resultados do modelo.

Palavras chaves: Dívida Soberana, Gestão da Dívida, Títulos Públicos, Expectativas, Macroeconomia

JEL: B22, E44, HG3

SUMÁRIO

Introdução.....	4
Perspectiva Histórica.....	6
Literatura.....	8
Fatos Estilizados	10
O Modelo	16
Modelo-Base	16
Modelo Completo	20
Teste empírico.....	24
Conclusão	26
Tabelas.....	27
Bibliografia.....	29
Apêndice	31
Derivação Completa do Modelo.....	31

Introdução

Governos enfrentam constantemente uma série de demandas sociais e políticas, as quais buscam atender de maneira factível. Tais demandas, às vezes, estão atreladas à autoridade única do governo em áreas nas quais o setor privado não possui autoridade - nem legitimidade - para atuar; por exemplo em transferências intergeracionais¹, caso de sistemas de previdência e impostos. Para atendê-las, entretanto, o governo deve, primeiro, absorver parte dos recursos da economia. Há três formas básicas para isso: cobrança de impostos, emissão de dívida e criação de moeda.

Como sabido, caso decida endividar-se, o governo deve ir a mercado buscar recursos para financiar suas despesas. Dessa forma, é natural supor que o gestor da dívida pública atua como um agente racional visando minimizar o custo de financiamento do governo. Uma vez que impostos são distorcivos, o agente tende a tomar empréstimos visando suavizar os possíveis impactos de um aumento de carga tributária, que pode vir a ser necessário caso ocorra um endividamento excessivo, ao longo do tempo.

A necessidade de financiamento do governo inspira perguntas acerca das possibilidades de executá-la. De acordo com algumas hipóteses simplificadoras, o tipo de título sob o qual a dívida é emitida não faz diferença. Entretanto, uma análise básica da composição das dívidas soberanas ao redor do mundo segue na direção contrária. Como bem resume Fischer (1982): “Governments in inflationary difficulties issue indexed bonds and those that can avoid it, do not.”

O aparente paradoxo remete à teoria de precificação de títulos. Como a inflação reduz o payoff real dos títulos, os agentes passam a cobrar mais para detê-los em suas carteiras, aumentando, assim, seu custo de emissão para o governo. Entretanto, o quanto a mais será cobrado pelos agentes leva em consideração quanto do rendimento nominal dos títulos será corroído pela inflação.

Dessa maneira, títulos indexados à inflação parecem ser uma alternativa factível e barata para governos displicentes com sua política monetária. Note que estimativas do rendimento real dos títulos necessitam primeiro de formulação dos agentes acerca da inflação. Dentre os vários fatores a serem considerados na construção das expectativas, o principal é a credibilidade do Banco Central.

Confiança é uma das ferramentas mais importantes para os gestores da política monetária. Como apresentado por Lucas e Sargent, uma promessa de desinflação crível diminui o custo da desinflação. Ao mesmo tempo, as chamadas open mouth operations podem suavizar movimentos direcionando as expectativas dos agentes². Há diversas maneiras de se definir o que é credibilidade de um banco central, mas pode-se resumir que um banco central crível é aquele que convence os demais agentes de que irá entregar um determinado nível de inflação³.

1 Fischer (1982)

2 Ver Taylor (2001)

3 Ver Blinder (2000)

Vale destacar que tal processo não ocorre no vácuo. Banco central e governo coexistem, cada qual tentando avançar seus objetivos. Conforme argumenta Acemoglu et al. (2008):

“Most instances of high inflation are directly related to the inability of governments to fund their (often politically-motivated) expenditures through taxation and borrowing.”

Tais autores argumentam que a eficácia de reformas institucionais, especificamente a construção de jure da independência do Banco Central, depende do arcabouço institucional a priori encontrado. Seus resultados indicam que a independência do banco central possui maior impacto sobre a inflação em países com nível mediano de robustez institucional. Não obstante, também encontram um aumento no gasto do governo decorrente da redução da inflação, e, conseqüentemente, da receita inflacionária.

O caso brasileiro parece ser um exemplo do apontado. Até o ano de 2021, o Banco Central do Brasil não possuía independência de jure⁴, contando apenas com a independência de facto. Tal equilíbrio mostrava-se extremamente precário e dependente da boa vontade dos chefes do Poder Executivo instalados. Como mostrado na Seção 2, o arranjo institucional brasileiro não foi capaz de sustentar imaculado o objetivo principal de um Banco Central. A célebre anedota de Roberto Campos com o Gen. Figueiredo resume bem a frágil situação. Preocupado com a ingerência do governo no Banco Central, Campos alerta o presidente de que o Banco Central deve preservar seu papel de guardião da moeda. Ao qual, Figueiredo responde: “O guardião da moeda sou eu!”⁵

Devido ao problema crônico com altas taxas de inflação, o Brasil tornou-se um laboratório para a criação dos mais diversos ativos que buscavam manter tanto seu valor real protegido quanto replicar a liquidez do papel-moeda. Segundo Carneiro (1999), tal criatividade permitiu não só o funcionamento relativamente normal da economia ante um cenário de inflação altamente desagregador e perverso, como o crescimento de um sistema financeiro, no limite das possibilidades, robusto e complexo - além de, surpreendentemente, não dolarizado.

As particularidades brasileiras vão além. Os sucessivos choques vividos pela economia brasileira, aliados às dificuldades de gestão da política econômica, levaram a diversas crises de pagamento da dívida externa. Dessa forma, a partir da década de 1980, acabou-se criando, no Brasil, um ambiente onde a maior parte dos detentores da dívida pública é doméstica.

Garcia e Bevilaqua (1999) analisam o bom desempenho da economia brasileira frente à desvalorização vivida em 1998 de acordo com a literatura de crises cambiais e de confiança. Encontram que

4 LEI COMPLEMENTAR Nº 179, DE 24 DE FEVEREIRO DE 2021 - LEI COMPLEMENTAR Nº 179, DE 24 DE FEVEREIRO DE 2021 - DOU - Imprensa Nacional (in.gov.br)

5 A Lanterna de Popa

o fato de haver um forte viés doméstico, mesmo que difícil de ser mensurado⁶, reduziu a volatilidade da demanda por títulos no país.

Ao mesmo tempo, características já citadas acima do desenvolvimento do mercado financeiro doméstico também contribuíram para a estabilidade do mercado de títulos do governo durante o período turbulento da década de 90. Afirmam os autores, bancos e o Banco Central eram parceiros ao rolar a dívida interna, os primeiros recebendo uma alta remuneração de juros e incorrendo em um pequeno risco de mercado. A contrapartida advinha pela oferta dos bancos de um substituto quase perfeito ao papel-moeda: depósitos à vista que contabilizavam juros.

Tais características não se perdem em décadas apenas. Mesmo com a restauração da credibilidade do país ao longo do tempo, a maior parte da dívida pública continua sendo constituída de títulos domésticos. Alfaro e Kancuzk (2018) analisam o aumento da participação dos investidores estrangeiros no mercado doméstico de títulos à luz da opção do governo de emitir títulos domésticos e acumular reservas.

Dessa forma, é importante analisarmos acontecimentos recentes referentes às decisões de endividamento do governo à luz de tais características. Externalizar possíveis relações causais presentes entre a credibilidade do Banco Central e a gestão da dívida pública mostra-se fundamental. O trabalho segue com uma breve análise histórica dessa relação no Brasil na próxima seção; a seção três aponta a revisão de literatura de ambos os campos de estudo; a seção quatro trata de uma análise inicial dos dados; a seção cinco define características do modelo a ser utilizado; a seção seis aponta os resultados; por fim, a seção sete conclui.

Perspectiva Histórica

No Brasil, ao contrário da maioria dos países que passou por processos de inflação alta, a persistência inflacionária não impediu o financiamento formal do governo. Isso deveu-se à criação de instrumentos de reajuste de preço indexados à inflação. Inicialmente voltado apenas para títulos públicos, a indexação viria, ao longo de duas décadas, a infiltrar-se por todos os setores da economia brasileira.

O sucesso do instrumento é ilustrado por Garcia et. alli (1999), segundo os quais títulos públicos indexados, ORTNs, eram vistos pelos investidores locais como uma proteção efetiva contra a inflação e que permitia que mantivessem títulos públicos em sua carteira. O sucesso foi tal que, durante a década de 1960, a demanda por títulos cresceu além da necessidade de financiamento do governo.

Na década de 1980, com a crescente volatilidade da inflação, títulos denominados em termos nominais mostraram-se cada vez mais arriscados. Consequentemente, as intervenções do Banco Cen-

6 Há diversos meios indiretos pelos quais investidores estrangeiros podem deter títulos públicos brasileiros. Entretanto, os autores argumentam que mudanças regulatórias do período permitem a avaliação de que a participação de estrangeiro na demanda por títulos públicos era pequena.

tral para estabilizar instituições posicionadas em tais títulos tornaram-se cada vez mais frequentes.⁷

Visando corrigir o problema, novos títulos foram criados: a LBC (Letra do Banco Central) e a LFT (Letra Financeira do Tesouro). Como era de se esperar, tais títulos, além de serem pós-fixados, possuíam baixíssima maturidade (a menor delas sendo a da LFT, de 48 dias). Ao longo da década de oitenta, a maturidade média dos títulos públicos caiu de 20 meses para 11 meses.⁸

Tal processo de indexação e espiral inflacionária foi acompanhado, como temia Roberto Campos, *pari passu* pela deterioração da capacidade institucional do Banco Central de cumprir sua missão como guardião da moeda. Como afirma Franco (2017), o desvio do BCB de sua função principal deveu-se a quatro fatores primordiais: “a assunção de funções de fomento à agricultura pelo BCB; a conta movimento; o orçamento monetário; e destruição da governança original”⁹

O primeiro ponto deveu-se, basicamente, a uma necessidade política. Segundo descreve Franco a respeito da interpretação de Roberto Campos sobre a questão:

“Bulhões achou que a implantação do BCB já era em si uma tarefa difícil; não conviria azedá-la por uma disputa com os ruralistas do Congresso’. Dessa forma, estabeleceu-se, dentre os objetivos do Banco Central, o fomento à agricultura através do crédito subsidiado”¹⁰

A Conta Movimento foi adotada como uma medida provisória que permitisse o andamento das operações do Banco Central ainda que sua estrutura burocrática não estivesse totalmente acabada. Seguiria-se, portanto, de forma similar ao comportamento habitual da conta, quando essa interligava a Superintendência da Moeda e do Crédito (Sumoc) ao Banco do Brasil - a Sumoc, apesar de reguladora do sistema financeiro nacional não era capaz de receber depósitos, que, dessa forma, acabavam por ser depositados no Banco do Brasil. Entretanto, a estrutura, que era para ser provisória, tornou-se permanente¹¹:

“Com a passagem do tempo, todavia, foi crescendo a percepção de que a conta movimento estabelecia na prática um arranjo extremamente conveniente para quem imaginava um sistema de bancos públicos temáticos recebendo suprimentos automáticos de um banco central sem capacidade de limitar as operações de crédito que se via obrigado a financiar.”

O orçamento monetário, por sua vez, possuía inicialmente - quando ainda existia a Sumoc

7 Garcia et. alli (1999)

8 Ibidem

9 Franco (2017) pp. 422

10 Ibidem pp. 420

11 Ibidem pp. 424

- um caráter meramente de estatística dos meios de pagamentos. Entretanto, com o surgimento do Banco Central, e ao longo da década de 1970, o orçamento monetário viria a ter papel primordial na escalada inflacionária. Passaria a ser o meio de concentrar todos os recursos creditícios disponíveis para o Estado e redistribuí-los da maneira que o governo decidisse ser melhor. A vantagem era que tal orçamento, mesmo tendo caráter fiscal expansionista, passava ao largo do Congresso Nacional e estava sob tutela direta do Conselho Monetário Nacional (CMN).¹²

Por fim, temos a reformulação da composição original do CMN, instituição hierarquicamente superior ao Banco Central. De início, tal composição dava-se de modo a estabelecer os principais objetivos de um Banco Central. A fragilidade institucional, entretanto, transparecia pela estrutura por demais personalista. Com a queda da equipe mais “ortodoxa”, representada por Roberto Campos e Otávio Gouvêa de Bulhões, a composição do CMN foi alterada de modo que atendesse não à missão primordial de um banco central -a estabilidade monetária -, e sim os mais difusos interesses. O CMN, que inicialmente contava com nove membros, chegou a ter 26 participantes em 1986. Não obstante, com as reformas introduzidas junto com o Plano Real, em 1994 sua composição foi reduzida a três membros.¹³

Portanto, percebe-se que o Plano Real propiciou não só o fim do processo hiperinflacionário brasileiro, mas também abriu espaço para uma melhor estruturação da governança pública, dentre elas, inclusive, a dívida pública. Entretanto, como afirmam Garcia e Salomão (2006):

“A conquista da hiperinflação era acertadamente tida como condição sine qua non para obtermos mercados de renda fixa mais ‘civilizados’ [...] A hiperinflação foi derrotada pelo Plano Real há mais de onze anos. Não obstante, os progressos no alongamento dos mercados de renda fixa público têm se situado bastante aquém do que se esperava”

A próxima seção revisita os argumentos da literatura que respondem a tal impasse.

Literatura

A literatura econômica em geral considera a gestão da dívida pública como um agente otimizador buscando minimizar o custo de financiamento do governo. Caso as hipóteses de mercados completos e informação perfeita sejam satisfeitas, não há benefício em utilizar diversas categorias de títulos para financiamento da dívida.

Entretanto, é fácil notar que tais pressupostos parecem desconectados da realidade. Dessa forma, Goldfajn e De Paula (1999) enumeram as características atreladas à emissão de dívida soberana:

- **risco inflacionário:** indexação total da dívida só seria ótima no caso em que receitas e des-

12 Ibidem pp. 429-430

13 Ibidem pp. 435

pesas reais fossem constantes;

- **risco de câmbio real:** o custo das dívidas denominadas em moeda estrangeira é diretamente relacionado à volatilidade cambial. O ideal, em um regime de câmbio flutuante, seria, portanto, reduzir a exposição a essa categoria;
- **correlação entre gastos e inflação:** caso a correlação entre gastos governamentais e inflação seja positiva, o ótimo seria aumentar a exposição à dívida nominal, pois um aumento da inflação acarretaria um menor custo real da dívida;

Não obstante, é necessário ressaltar os riscos associados à sua emissão: risco de rolagem e credibilidade do governo.

Seguindo esse raciocínio, Missale, Giavazzi e Benigno (1997) estudam 62 episódios de ajuste fiscal nos países da OCDE entre 1975 e 1995; considera-se ajuste fiscal o período em que o superávit primário tenha aumentado em pelo menos 1 por cento. Além disso, pela definição dos autores, dívida de longo prazo se caracteriza por títulos nominais pré-fixados e empréstimos denominados em moeda doméstica com prazo maior que dois anos. Dívida de curto-prazo, por sua vez, engloba dívida em moeda estrangeira e títulos indexados. A credibilidade do ajuste, por sua vez, é medida de forma ex-post, utilizando o spread entre as taxas dos títulos de longo-prazo do país e dos títulos alemães.

O resultado encontrado indica que ajustes mais críveis tendem a acarretar uma maior maturidade na emissão dos títulos. Ao mesmo tempo, um governo que pretende sinalizar seu compromisso com o ajuste tende a emitir dívidas de menor prazo buscando, em um futuro próximo, refinanciá-la a um custo menor.

Garcia e Salomão (2006) ressaltam a importância do risco sistêmico para o mercado de títulos. Aponta-se que nem mesmo as diversas formas de emissão dos mesmos - entenda-se nominal, indexado ou denominado em dívida externa - são capazes, por si só, de diversificar totalmente o risco sistêmico do mercado nacional. Tal impossibilidade contribui para uma atrofia dos mercados financeiros nacionais.

Como apresentado na introdução, o Banco Central também possui papel importante - mesmo que indireto - na gestão da dívida pública, ao ser responsável por ancorar expectativas em torno do comportamento da inflação. Consequentemente, uma revisão da literatura acerca da credibilidade dos Bancos Centrais e como mensurá-la torna-se fundamental.

Soares (2018), baseando-se em metodologia apresentada por Gaglione e Issler (2015) e utilizando principalmente informações do Sistema Focus de Expectativas, cria um índice de credibilidade micro-fundamentado, pautando-se na expectativa de inflação 12 meses à frente. O resultado indica que o Banco Central do Brasil provou-se crível em 65 por cento da amostra em estudo, com exceção dos períodos dos primeiros meses de 2007, e entre 2013 e 2016.

Diversos outros índices foram criados especificamente para o Brasil; entretanto, a grande maioria possui foco na expectativa de curto-prazo para a inflação. Nesse intervalo, porém, a economia

está sujeita a choques exógenos que tendem a gerar vieses nos índices de credibilidade, mesmo que tais choques sejam ortogonais ao comportamento do Banco Central. A eleição de 2002, na qual havia o risco de ruptura institucional com ameaças de não pagamento da dívida pública, pode ser considerada um exemplo de tais choques.¹⁴

Gaglianone e Oliveira (2017) propõe-se a criar um índice de credibilidade do Banco Central com uma perspectiva de longo prazo, isto é, com foco na capacidade do Banco Central de influenciar as expectativas de longo-prazo dos agentes sobre a inflação. A interpretação difere ligeiramente daquela mais comum na literatura, seguindo Blinder (2000), na qual um Banco Central crível é aquele que se compromete com uma baixa taxa de inflação. Para os autores, um Banco Central crível é aquele que consegue ancorar expectativas no longo-prazo.

Para construção do índice, foram utilizadas diversas métricas que serviram de sinais para o modelo que, posteriormente, é suavizado através de um filtro de Kalman. Dessa forma, utilizou-se as expectativas de inflação retiradas da base de dados do Sistema Focus do Banco Central, títulos nominais do governo (LTN), títulos pós-fixados (NTN-B) e, por fim, informações relativas ao mercado de swaps - os chamados “Futuro-DI”.

Utiliza-se o spread do yield to maturity dos títulos LTN contra os títulos NTN-B como uma métrica para a inflação implícita, seguindo a metodologia inicialmente proposta por Svensson (1993). Apesar de não ser uma métrica “pura” de expectativas de inflação, os autores reafirmam sua importância argumentando que o Federal Reserve, banco central americano, refere-se constantemente a uma métrica similar como um possível indicador das expectativas de inflação.

Lowenkron e Garcia (2007), por sua vez, derivam um modelo de apreçamento de ativo seguindo um modelo de Regra de Taylor visando quantificar a inflação implícita (como definida anteriormente). O intuito, portanto, é avaliar a credibilidade do Banco Central, dividindo tal medida em dois componentes: a inflação, de fato, esperada; e o prêmio de risco para inflação.

O resultado encontrado aponta que choques de curto-prazo na inflação tem efeito no médio-prazo, aqui também utilizada a métrica da inflação esperada em 12 meses. O efeito poderia ser resultante de dois fatores: inércia, devido ao, ainda, elevado grau de indexação da economia, ou à falta de credibilidade do Banco Central. Os autores concluem que a indexação não pode ser a causa, uma vez que não possui correlação com o prêmio de risco da inflação.

Fatos Estilizados

Os dados relativos à expectativa de inflação dos analistas especializados foram retirados do Sistema de Expectativa Focus do Banco Central do Brasil (BCB).

Os dados referentes à dívida pública federal foram retirados de diversas fontes: Tesouro Nacional, Banco Central e Ministério da Fazenda. Por fim, preços de ativos financeiros, bem como suas

14 Para mais, ver a crítica presente em Gagliaone e Oliveira (2017)

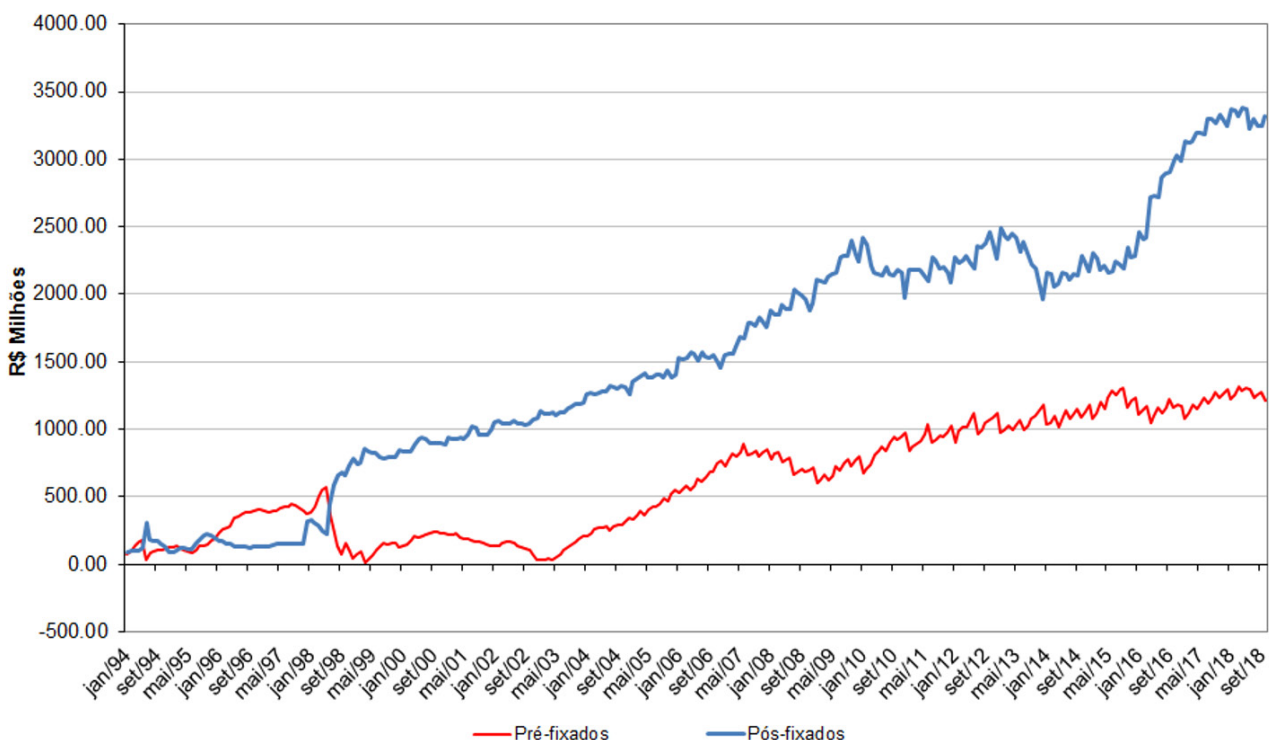
demais características, foram retirados do sistema Brasil, Bolsa e Balcão (B3).

O gráfico 1 demonstra a evolução da composição da dívida pública no período de 1994 até outubro de 2018. Inclui-se, portanto, o período anterior ao Regime de Metas de Inflação - estabelecido em 1999 pelo então presidente do Banco Central Armínio Fraga. Utilizou-se como categoria de classificação os títulos pré-fixados, normalmente referenciados como nominais na literatura, e títulos pós-fixados, ou indexados. Excluiu-se aqueles denominados em moeda estrangeira por representarem uma parcela pequena da dívida total quando comparado às principais categorias: títulos atrelados à Selic e títulos atrelados a índices de preços.

Uma primeira observação demonstra uma inversão na evolução do tipo de dívida logo no começo da amostra. Entre 1995 e setembro de 1998, os títulos pré-fixados crescem constantemente, enquanto os títulos indexados permanecem constantes. Tal fato deve-se em parte pelo fim do processo hiperinflacionário brasileiro, permitindo, assim, uma maior previsibilidade de médio prazo para taxas nominais. Pode-se atribuir tal comportamento também ao regime de câmbio fixo adotado nesse período.

Quanto aos títulos pré-fixados, percebe-se que eles crescem de maneira acelerada entre 2004 e 2008, porém mantém-se praticamente estáveis, ou com um ligeiro crescimento, desde então.

Gráfico 1 - Evolução da Dívida Pública por Categoria - Valores Reais



O gráfico 2 ilustra a composição da categoria apresentada como “títulos pós-fixados”. Pode-se perceber que ambas as categorias convergem para 50% cada, em um processo que dura cerca de 14 anos. Porém, em 2016, percebe-se que tal padrão é rompido e a diferença tende a aumentar beneficiando os títulos indexados à Selic.

Gráfico 2 - Evolução da Composição dos Títulos (%)

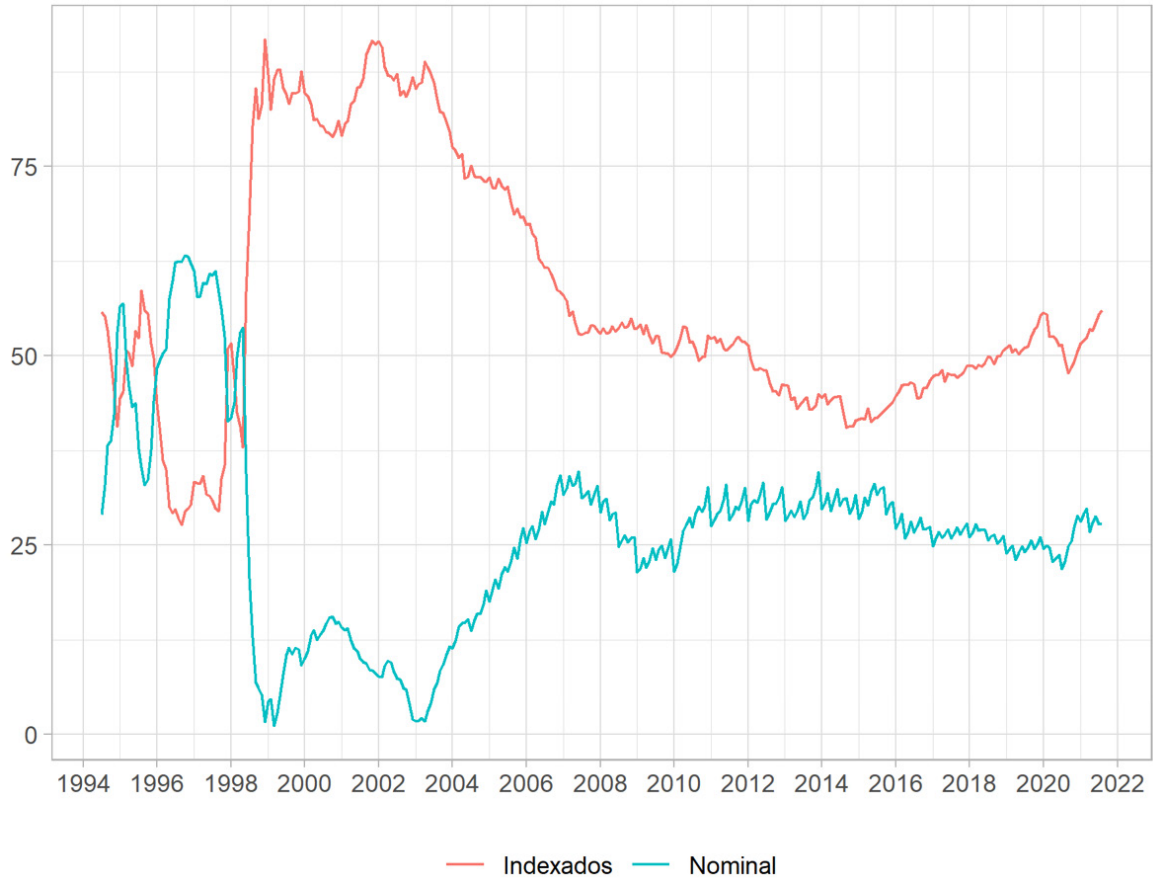
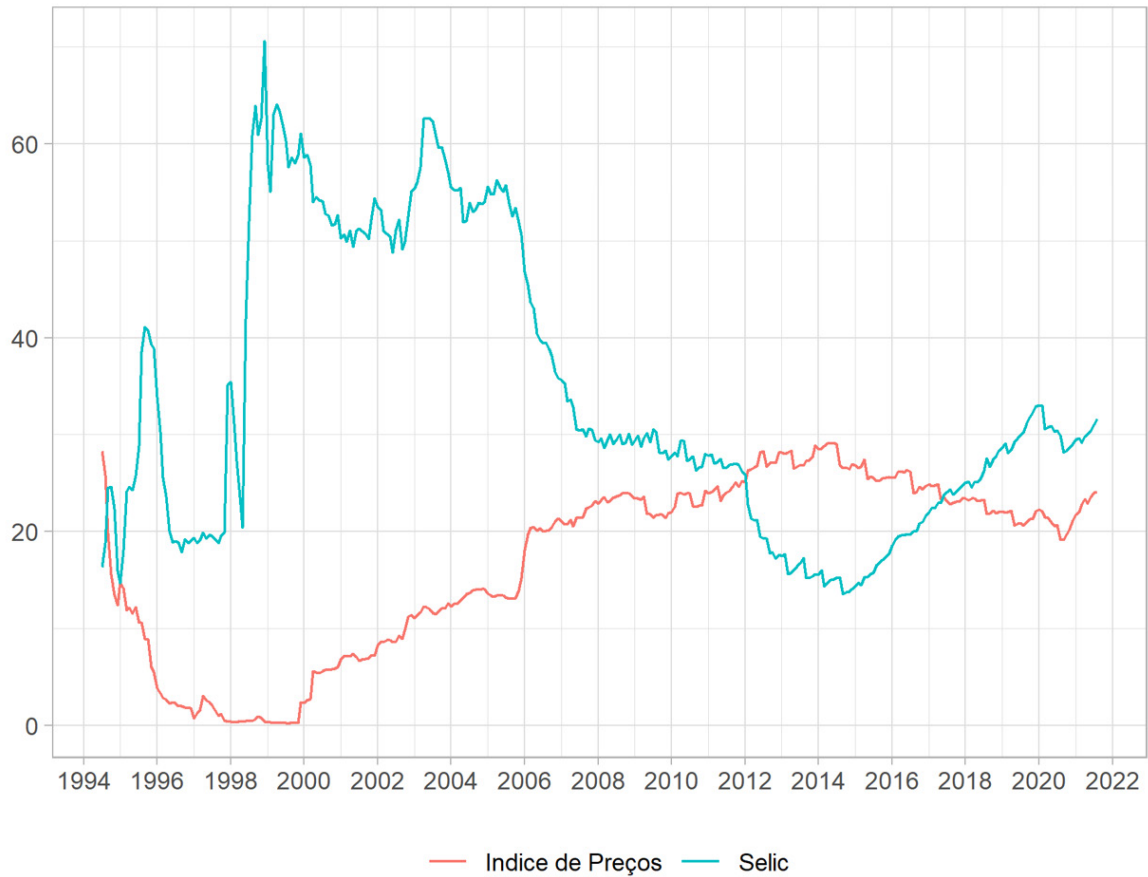


Gráfico 3 - Evolução da Composição dos Títulos (%)



A crítica de Goldfajn e De Paula (1999) torna-se fundamental no contexto brasileiro. Uma vez que, devido à grande quantidade de gastos indexados e rígidos atrelados à Constituição de 1988, o governo brasileiro possui uma alta correlação entre gastos e inflação (Gráfico 3). Portanto, nos estados ruins - nos quais o governo deveria se aproveitar de seu impacto inflacionário -, percebe-se justamente a redução do percentual de títulos nominais na composição da dívida

Outro ponto apontado pelos autores é a credibilidade do governo. Uma vez que o Banco Central não possui independência de jure consolidada, os agentes podem tentar antecipar um desvio inflacionário, tal como já exposto.

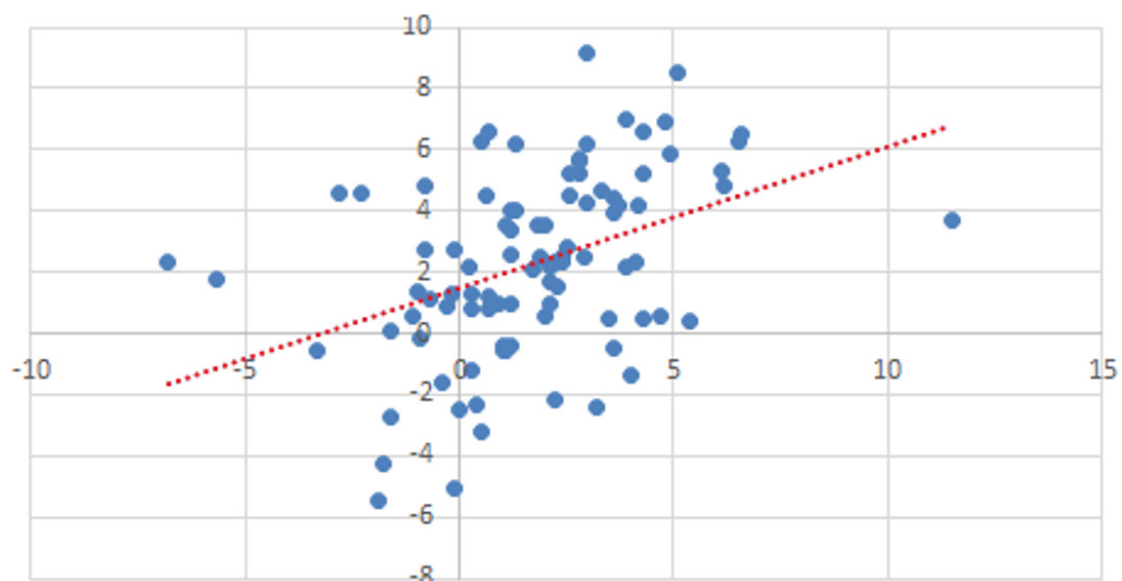
Os gráficos 4 a 5 buscam ilustrar a intuição. Neles descreve-se a relação entre o percentual de dívida indexada e o nível de credibilidade da política inflacionária, medida através do desvio das expectativas de inflação com relação às suas metas, para cada mandato de presidente do Banco Central desde a introdução do Regime de Metas de Inflação. Por fim, o gráfico 6 sugere que, mesmo após a legislação que torna o banco central independente, desvios significativos da meta levam os agentes a reagirem.

Constatados na seção anterior os problemas na construção de índices de credibilidade, o índice usado baseia-se somente nas expectativas de inflação do Sistema Focus. Utilizou-se uma média das expectativas de inflação para o ano corrente e os dois posteriores com suas respectivas metas.

Os gráficos 5, 7 e 8 parecem coerentes com o argumento. Neste segundo, parece ter ocorrido um deslocamento horizontal das expectativas depois dos seis primeiros meses de mandato - o que poderia ser interpretado como um choque de credibilidade.

Porém, o gráfico 6 aponta para evidências em contrário. Pois em tal período a relação ficou negativa. Isso significa uma correlação positiva entre o percentual da dívida atrelada a títulos nominais e desvios das expectativas em relação à meta de inflação.

Gráfico 4 - PIB x Consumo do Governo



Fonte: IBGE

Obs: Trimestre contra trimestre do ano anterior

Gráfico 5 - BCB sob Meirelles

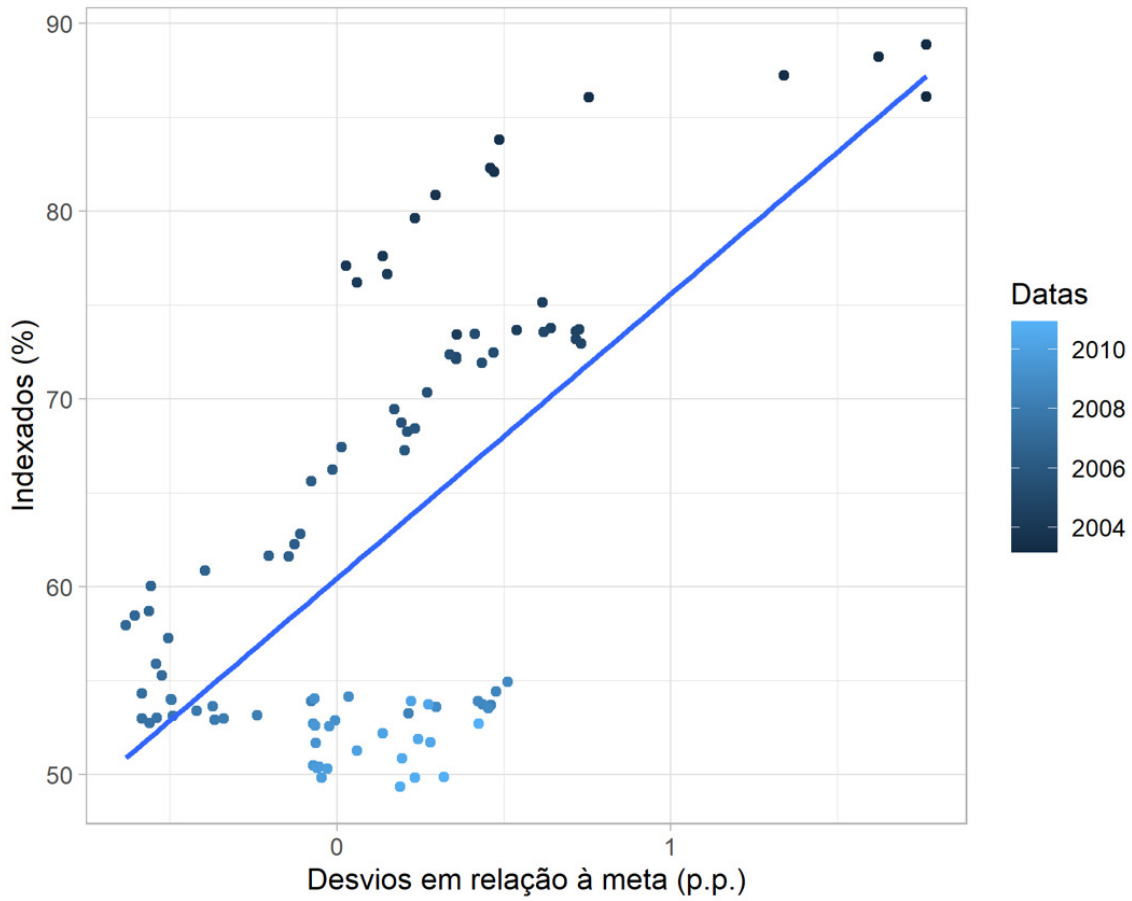


Gráfico 6 - BCB sob Tombini

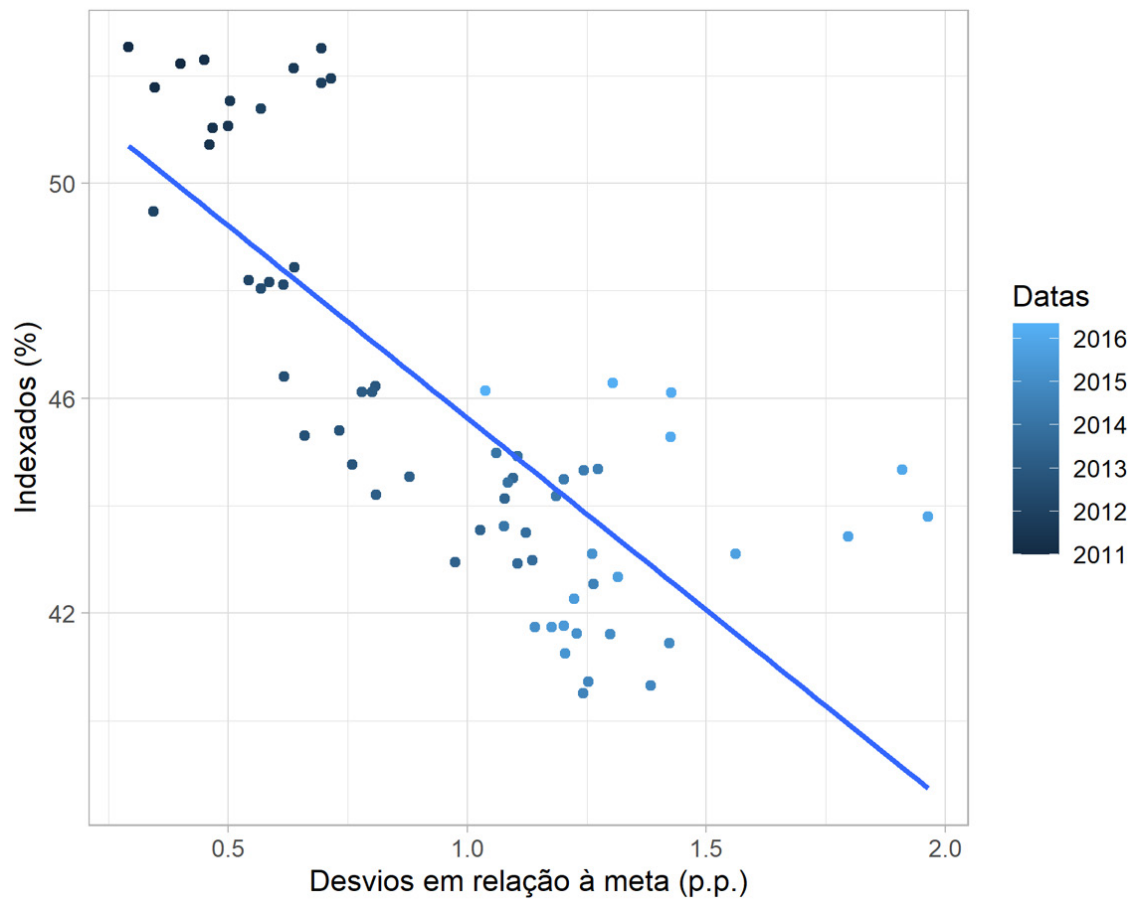
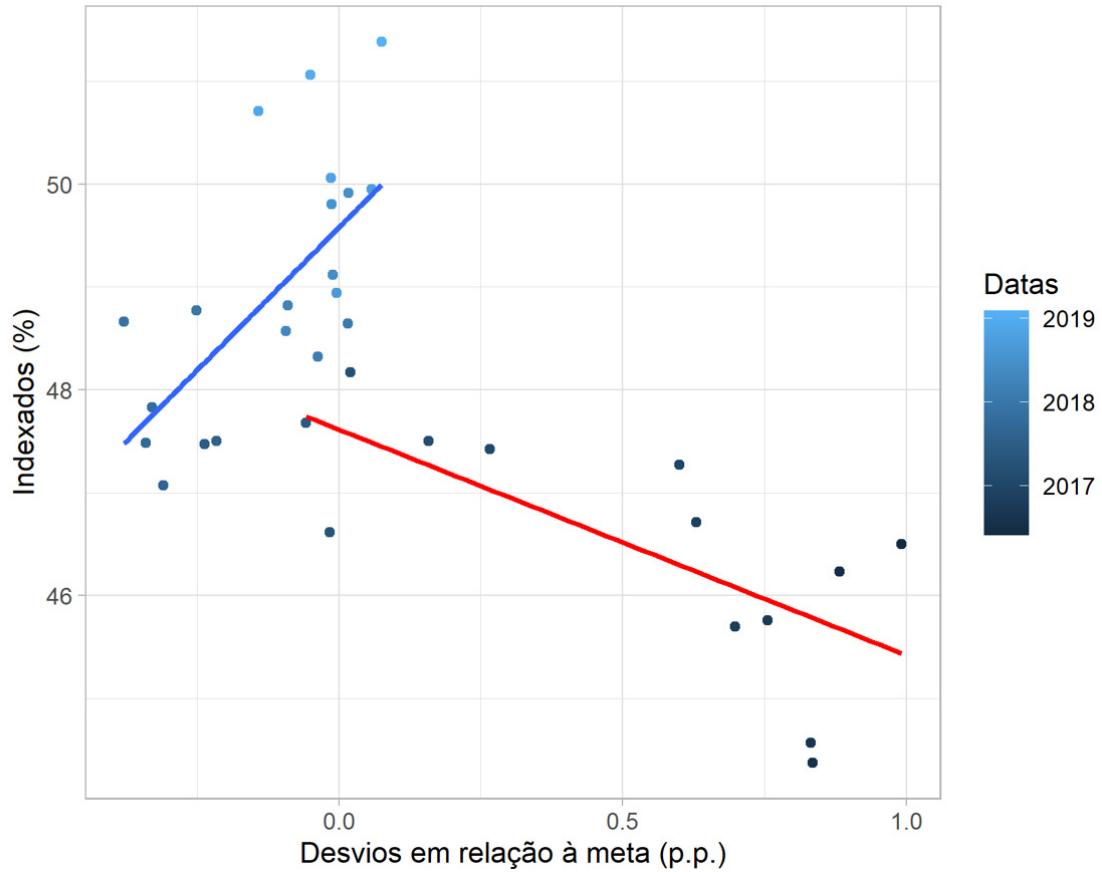
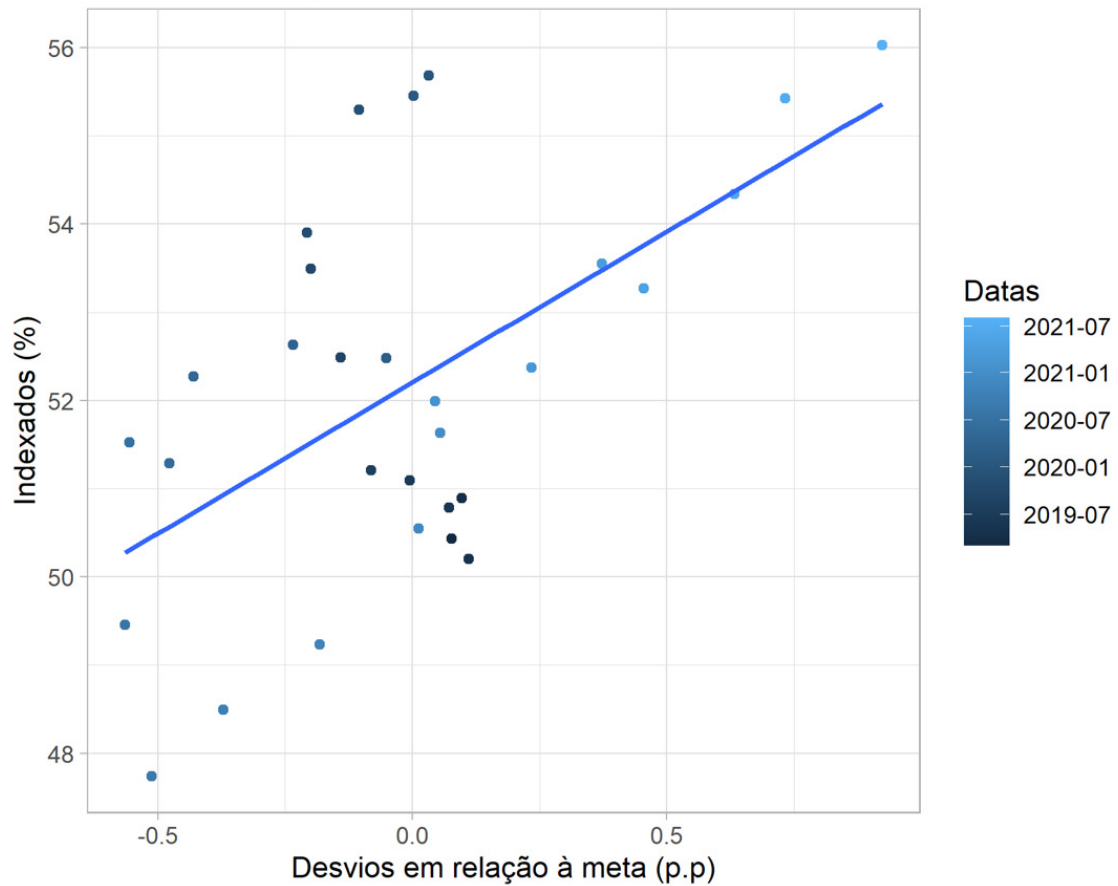


Gráfico 7 - BCB sob Goldfajn

Gráfico 8 - BCB sob Goldfajn


O Modelo

Acredita-se que tal movimento seja causado pela falta de credibilidade do governo em manter sua política inflacionária sob controle. O argumento é semelhante ao modelo desenvolvido em Du, Pflueger e Schreger (2016). Os autores formulam um modelo que seja compatível com as evidências empíricas encontradas; essas apontam que justamente os países que mais se beneficiariam dessa sua-
vização de consumo entre estados da natureza são aqueles que possuem menor percentual de títulos nominais.

O canal através do qual se dá o mecanismo de equilíbrio é o prêmio de risco. Esse aumenta o custo de emissão de títulos nominais, o que impede o governo de se financiar exclusivamente por essa categoria. Dessa forma, o governo é obrigado a buscar outros meios de financiamento.

O modelo desenvolvido pelos autores trata da diversificação entre títulos denominados em moeda local e títulos denominados em moeda estrangeira. Devido ao contexto histórico apresentado na Seção 2, o Brasil possui um percentual extremamente baixo de dívida denominada em moeda estrangeira, e, além disso, possui a grande maioria dos detentores de seus títulos como nacionais.

Modelo-Base

Dessa forma, desenvolveu-se, primeiramente, uma versão simplificada do modelo utilizado em Du, Pflueger e Schreger (2016), de modo a explicar a realidade brasileira. O modelo segue com dois períodos, governo e investidores. Esses últimos, entretanto, serão domésticos, e terão, dentre as opções de investimento, títulos nominais (com payoffs reais incertos) e títulos pós-fixados (com retornos reais constantes independente dos estados da natureza).

O objetivo de modelo-base é ilustrar o mecanismo pelo qual é ótimo para o governo desviar de sua política de inflação, dada sua função-objetivo. O governo busca, portanto, maximizar a utilidade esperada do consumo de seus serviços (ou transferências) no período 2.

Note que, como corroborado pela literatura, é natural supor que há dois tipos diferentes de agentes: os que recebem os serviços (transferências) governamentais, e aqueles que detém os títulos públicos.

Para isso, ele precisa emitir um montante D^* de dívida no período 2 que será entregue como bens e serviços à população em $t = 2$.

$$U(x_2) = (1 + \bar{D})x_2 - D_2 - b\pi^2$$

Equação 1

Onde x_2 representa o produto interno da economia no período 2 e possui distribuição normal $N(\bar{X}, \sigma^2)$. D_2 é o montante da dívida a ser pago no período 2. Por fim, o parâmetro b representa custos de inflação.

O governo, portanto, ao tentar maximizar a utilidade da população, busca, na verdade, minimizar o custo de sua dívida. Para financiá-la, há apenas dois meios: títulos nominais (n) e títulos indexados à inflação (ind). Portanto, pode-se pensar no problema do governo da seguinte forma:

$$F_G(\pi) = \max\{(1 + \bar{B})x_2 - D_2 - b\pi^2\}$$

Equação 2

Sujeito a:

$$(1 - s)Q_{ind} + sQ_n = \bar{D}$$

Equação 3

Onde Q_i é o preço do título i .

Observe que, pelo fato de o título indexado apresentar um pay-off constante em todos os estados da natureza, ele representa algo o mais próximo possível de um ativo sem risco nessa economia. Dessa forma, os preços de tais títulos, em equilíbrio, devem ser:

$$Q_{ind} = \frac{1}{1 + R}$$

$$Q_n = \frac{1 - \pi^e}{1 + R}$$

Agora, suponha que o governo venda esses títulos para um agente representativo racional, avesso ao risco e que busca maximizar sua utilidade da seguinte forma:

$$F_A(s) = \max_s \{ E(R_p) - \gamma V(R_p) \}$$

Equação 4

Onde R_p é o retorno do portfólio do agente representativo.

Suponha que o agente receba, de maneira exógena, uma dotação no período 1 (dx_1), que será totalmente poupada e usada para compra dos títulos. Note que, como estamos em uma economia fechada: $dx_1 = \bar{D}$. Suponha também que, para os agentes, o Banco Central é perfeitamente crível.

O portfólio dos investidores se dá por:

$$R_p = s \left[\frac{1 - \pi_i}{Q_n} - 1 \right] + (1 - s)R_{ind}$$

Equação 5

É possível substituir Q_n em (5):

$$E[R_p] = s \left(\frac{1+R}{1-\pi^e} \right) E(1 \cdot \pi) + (1-s)R_i$$

Seja $(1+R)/(1-\pi^e) = \beta$, temos:

$$E[R_p] = s\beta E[1 - \pi] + R_i - sR_i$$

Equação 6

Analogamente, a variância do portfólio é dada por:

$$V(R_p) = \left[\frac{1+R}{1-\pi^e} \right]^2 s^2 V(\pi)$$

Equação 7

Substituindo em (4):

$$F_A(s) = \max_s (\beta s E[1 - \pi] + R_{ind} - sR_{ind} - \gamma p^2 s^2 \sigma_\pi^\alpha)$$

Equação 8

$$\frac{\partial F_A}{\partial s} = \beta E[1 - \pi] - 2s(\gamma p^2 \sigma_\pi^2) - R_{ind}$$

No ponto ótimo, temos:

$$s = \frac{E[1 - \pi]}{(1 - \pi^e)} (1 + R) \frac{1}{2\gamma \sigma_\pi^2} - R_{ind}$$

Equação 9

Observe que pode-se reescrever a equação acima como:

$$s = E \left[\frac{1 - \pi}{1 - \pi^c} \right] (1 + R) \frac{1}{2\gamma \sigma_\pi^2} - R_{ind}$$

Equação 10

Fazendo uma aproximação de Taylor:

$$E \left[\frac{1 - \pi}{1 - \pi^e} \right] = \frac{E[1 - \pi]}{E[1 - \pi^e]} \approx 1$$

Portanto,

$$S = \frac{1 + R}{2\gamma\sigma_\pi^2} - R_{ind}$$

Equação 11

Observe que $\partial s/\partial \gamma < 0$, $\partial s/(\partial \sigma_\pi^2) < 0$ e $\partial s/(\partial R_{ind}) < 0$

Ou seja, quanto mais avessos ao risco, maior a variabilidade da inflação ou maior o retorno dos títulos indexados, menor será a proporção da carteira alocada em títulos nominais.

Uma vez que os agentes estabelecem a proporção entre os tipos de títulos, o governo pode escolher desviar sua política inflacionária de modo a maximizar a utilidade descrita em (2).

$$F_s(\pi) = \left[1 + \frac{1 - s}{1 + R} + \frac{s(1 - \pi_e)}{1 + B} \right] x_2 - b\pi^2 - [(1 - s) + s(1 - \pi)]$$

Equação 12

Consequentemente:

$$\frac{\partial F}{\partial \pi} = -2b\pi + s$$

No ótimo:

$$\pi(2b) = s$$

Equação 13

De maneira equivalente:

$$\pi = \frac{s}{2b}$$

Equação 14

Note que $\partial\pi/\partial b > 0$, quanto maior a proporção de títulos nominais, maior a inflação gerada para minimizar o custo da dívida. Ao mesmo tempo, $\partial\pi/\partial b < 0$, quanto maior o parâmetro que representa custos de inflação, menor será a inflação ótima.

Modelo Completo

Agora, ainda seguindo Du, Pflueger e Schreger (2016), suponha que a população possui power utility e é financiada por uma acumulação de dívida em $t = 1$ de \bar{D} .

$$U(C_2) = \frac{C_2^{(1-\gamma)}}{1-\gamma}$$

Equação 15

O governo pode financiar tal déficit através da emissão de dois tipos de títulos: nominais D^n e indexados D^{ind} . Vale lembrar que o segundo tipo apresenta um retorno real de $R^{ind} = R$. De forma que:

$$Q^n D^n + Q^{ind} D^{ind} = \bar{D}$$

Equação 16

Pode-se normalizar, de modo que tenhamos:

$$Q^n s + Q^i (1 - s) = \bar{D}$$

Equação 17

Onde s representa a proporção total da dívida emitida através dos títulos nominais e Q^i , o preço (custo) do título de tipo i .

Assim como no modelo original, assume-se que a dotação de renda da população possui distribuição log-normal:

$$X_2 = \bar{X} e^{\frac{x_2}{\bar{X}}}, \quad x_2 \sim N(0, \sigma), \quad \bar{X} = 1 + \bar{D}$$

Equação 18

O consumo dos gastos governamentais no segundo período deve ser, portanto, equivalente ao seu gasto no período menos o pagamento da dívida contraída:

$$C_2(X_2) = X_2 - D_2(x_2)$$

Equação 19

onde o pagamento é descrito por:

$$D_2(X_2) = D^n [e^{-\pi_2 X_2}] + D^i$$

Equação 20

A qual pode-se rescrever como:

$$D_2(X_2) = s[e^{-\pi_2 X_2}] + (1 - s)$$

Por fim, apresentamos os investidores. Assume-se que eles possuem time-separable CRRA preferences com uma aversão ao risco γ^* e taxa de desconto δ^* :

$$U(C_1, C_2) = E \left[\sum_{t=1}^2 (\delta^*)^t \frac{(C_t^*)^{1-\gamma^*}}{1-\gamma^*} \right]$$

Os investidores recebem uma dotação no primeiro período, que é totalmente poupada (ou seja, usada para comprar os títulos). Enquanto no período 2, eles recebem $X_2^* = \exp(x_2)$. Seu objetivo é, portanto:

$$\max_{C_1, C_2} E \left[\sum_{t=1}^2 (\delta^*)^t \frac{(C_t^*)^{1-\gamma^*}}{1-\gamma^*} \right]$$

Dessa forma, chegamos à seguinte Equação de Euler:

$$1 = E_t \left[\delta^* \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\delta^*} (1 + Ret_{p,t+1}) \right]$$

Equação 21

Supondo um o portfólio é composto somente por títulos pós-fixados, que sempre pagam uma taxa real R , portanto indica o mais perto de uma taxa livre de risco que existe nessa economia.¹⁵ Ficamos com:

$$1 = E_t \left[\delta^* \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\delta^*} (1 + R) \right]$$

¹⁵ Ver Fischer (1982)

E portanto, ao substituir C_t e C_{t+1} chegamos ao Fator Estocástico de Desconto (M) da economia:

$$\frac{1}{1+R} = E_t[\delta^* e^{(-\delta^* x_2)}]$$

O Fator Estocástico de Desconto (M) se dá pelo termo dentro da expectativa.

$$\frac{1}{1+R} = E_t[\delta^* \exp(-\gamma^* x_2^*)]$$

Uma vez derivado o Fator Estocástico de Desconto, em equilíbrio, o preço dos títulos deve refletir seu retorno real descontado tal taxa:

$$Q^n = E[Me^{-\pi_2 X_2}]$$

Equação 22

$$Q^{ind} = E[M] = \frac{1}{1+R}$$

Primeiramente, deve-se notar que M possui distribuição log-normal, portanto:

$$E[M] = -\delta^* \exp(E[-\gamma^* x_2^*] + \frac{1}{2}\gamma^{*2}\sigma_2^2)$$

Logo, temos que:

$$\frac{1}{1+R} = \delta^* \exp\left(\frac{1}{2}\gamma^{*2}\sigma_2^2\right)$$

Substituindo M em (22), temos:

$$Q^n = E[\delta \exp(-\gamma^* x_2^*) \exp(-\pi_2(x_2))]$$

$$Q^n = E[\delta^* \exp(-\gamma^* x_2^* - \pi_2(x_2))]$$

Equação 23

Sabemos que x_2 e π_2 são conjuntamente normais, e portanto:

$$E[\exp(z)] = \exp\left(E(z) + \frac{1}{2}Var(z)\right)$$

Onde $z = -\gamma^* x_2^* - \pi_2(X_2)$. Podemos definir a Variância como:

$$Var(-\gamma^* x_2^* - \pi_2(X_2)) = \gamma^{*2} \sigma_x^2 + Var(\pi_2(X_2)) + 2\gamma^* Cov(x_2, \pi_2)$$

O que nos leva à seguinte equação:

$$Q^n = \delta \exp\left(\frac{1}{2}\gamma^{*2}\sigma^2\right) \exp(-E[\pi_2(x_2)] + Var(\pi_2(X_2)) + 2\gamma^* Cov(x_2, \pi_2))$$

Por fim, o preço do título nominal é dado por:

$$Q^n = \frac{1}{1+R} \exp(-E[\pi_2] + \frac{1}{2}V(\pi_2) + \gamma^* Cov(x_2, \pi_2))$$

Equação 24

Percebe-se aqui o primeiro canal através do qual a inflação, e, portanto, a política monetária, pode afetar esse tipo de título. O preço de tal título possui uma relação direta e negativamente relacionada com a inflação esperada.

Não obstante, há também outro canal pelo qual às expectativas dos agentes podem afetar a emissão de tais títulos: através do prêmio de risco.

Pode-se definir o prêmio de risco do título nominal por seu excesso de retorno esperado:

$$PR^n = \ln\left(E\left[\frac{\exp(-\pi_2)}{Q^n}\right]\right) - \ln(1+R)$$

Recorrendo mais uma vez às propriedades da distribuição log-normal:

$$PR^n = \ln\left(\frac{1}{Q^n} \exp\left(-E[\pi_2] - \frac{1}{2}Var(\pi_2)\right)\right) - r$$

Substituindo Q^n na equação chegamos à:

$$PR^n = \ln\left(\frac{1}{1+R}\right) - \ln(\gamma^* Cov(x_2, \pi_2)) - r$$

Dessa forma, o prêmio de risco é definido por:

$$PR^n = -\gamma^* Cov(x_2, \pi_2)$$

Equação 25

Dessa forma, percebe-se que o prêmio de risco é inversamente proporcional à aversão ao risco dos investidores e da covariância entre produto e inflação.

Esse resultado implica que, caso um governo tente suavizar seu consumo inflacionando nos períodos de queda do produto, e consequente queda de arrecadação, os agentes cobrarão um maior preço para deter seus títulos nominais.

Teste empírico

Como explicitado pelo modelo anterior, é natural que notemos dois impactos fundamentais de falta de credibilidade da política de inflação: um aumento do custo de emissão de dívida e um aumento do percentual da dívida indexada.

Usando a metodologia adotada em Lowenkron e Garcia (2007), podemos adotar como medida do prêmio de risco (PR^n) a diferença entre a inflação implícita (π_I) e a expectativa de inflação de fato (π^e). Onde:

$$\pi_I = \frac{1 + i^n}{1 + i^{ind}} - 1$$

O custo associado à emissão de títulos pode ser entendido, portanto, como o prêmio de risco associado à inflação (prêmio de inflação):

$$PR^n = \pi_I - \pi^e$$

Utilizou-se como variável de taxa de juros nominal a taxa de juros pré-fixada da estrutura a termo da LTN referente a 12 meses¹⁶, enquanto o juros real é dado pelo Swap DIxIGP-M¹⁷. A decisão de escolha por este último se dá, pois, títulos referenciados no IPCA, índice sobre o qual é decidida a meta de inflação do Banco Central, eram pouco comuns até meados da primeira década dos anos 2000.

16 Disponível em: Ipeadata, “Taxa de juros pré-fixada – estrutura a termo – LTN – 12 meses”

17 Retirado do sistema de dados Refinitiv Eikon (código “DIIGPM1Y=BVMF”)

O objetivo passa a ser identificar se o prêmio de risco sobre a inflação leva o governo a otimizar a gestão da sua dívida levando-o a reduzir seu estoque de títulos nominais.

A regressão é dada por:

$$\%nominal = PR^n + dummies_{presidentes} + dummies_{mês} + \varepsilon$$

Equação 26

Os resultados obtidos são ilustrados na Tabela 1. Nela encontra-se uma correlação negativa entre o percentual de títulos nominais e o prêmio de risco de inflação. Percebe-se também que tal medida é estatisticamente significativa ao nível de 1%. A dummy para o período do ex-presidente Tombini se encontra positiva e também significativa a 1%.

A regressão (2) da tabela 1 indica que o percentual de títulos nominais é correlacionado negativamente com o IPCA acumulado em 12 meses, e é relevante a 1%. Nela, testa-se o efeito capturado pelo prêmio de risco de inflação e pela inflação acumulada é o mesmo.

Ou seja, testa-se se as expectativas são adaptativas, de modo que, ao incluir a inflação passada, o prêmio de risco de inflação, métrica forward looking, se tornaria não significativo. Não é isso que acontece. Ambos os regressores, além da dummy para os presidentes, são significativos ao nível de significância de 1%. Dessa forma, um aumento de 1% no prêmio de risco de inflação leva a uma redução de 1% no percentual de títulos nominais da dívida pública.

Por fim, as tabelas 2 repete o experimento, mas utiliza-se a taxa de referência do Swap DIxPré de 360¹⁸ dias como taxa de juros nominal para o cálculo do prêmio de risco de inflação. Os resultados são similares, corroborando o modelo apresentado acima.

18 Retirado do sistema de dados Refinitiv Eikon (código “BRPRE1Y=BVMF”)

Conclusão

Os benefícios da credibilidade de um Banco Central sobre seus objetivos de política monetária são bem estruturados ao longo da literatura. Não obstante as diversas métricas de credibilidade e as tentativas de mensuração do impacto de reformas estruturais que visam a independência do Banco Central, pouco se diz sobre a relação entre governo e Banco Central.

Com o modelo elaborado, mostra-se que as expectativas de inflação influem nas opções dos gestores da dívida pública, permitindo a eles alterar o tipo de dívida emitida de acordo com as necessidades do momento. Não obstante, percebe-se que o contrário também é possível. Um banco central pode atuar com o intuito de permitir ao governo financiar seus gastos.

Percebe-se, portanto, que, em um cenário institucional conturbado, a falta da independência, de jure ou de facto, do Banco Central estimulava os agentes a anteciparem os movimentos do Banco Central sempre levando em consideração a necessidade de financiamento de gastos do governo. Com a consolidação da independência do Banco Central nas expectativas dos agentes, a tendência é que esse risco se dissipe.

Como mostrado através da análise, o Brasil parece ter pertencido, em diferentes momentos históricos, aos dois casos. No primeiro, o Banco Central foi totalmente desvirtuado e colocado a serviço de lobbies diversos. O contexto, após a consolidação do Plano Real e de suas reformas, mostrou que a falta de uma independência de jure do guardião da moeda tem custos. Percebe-se que, a todo momento, os agentes buscam antecipar uma possível quebra da independência de facto - essa extremamente frágil e dependente da boa vontade dos personagens do momento - levando a constantes variações no estoque de títulos públicos. Não obstante, no longo prazo é possível perceber as impressões que cada presidente deixa sobre a dívida pública.

Tabelas
Tabela 1

	<i>Dependent variable:</i>	
	Nominal	
	(1)	(2)
inflation_premium	-1.424*** (0.210)	-1.008*** (0.170)
IPCA_12meses		-1.213*** (0.109)
Meirelles	0.901 (1.057)	2.035** (0.842)
Tombini	5.912*** (1.037)	8.623*** (0.856)
Goldfajn	1.152 (1.167)	1.170 (0.923)
Constant	23.767*** (1.106)	29.023*** (0.994)
Observations	220	220
R ²	0.389	0.620
Adjusted R ²	0.347	0.592
Residual Std. Error	4.612 (df = 205)	3.647 (df = 204)
F Statistic	9.329*** (df = 14; 205)	22.185*** (df = 15; 204)
<i>Note:</i>	* p<0.1; ** p<0.05; *** p<0.01	

Tabela 2

	<i>Dependent variable:</i>	
	Nominal	
	(1)	(2)
<i>inflation_premium</i>	-1.166 ^{***} (0.211)	-0.836 ^{***} (0.168)
<i>IPCA_12meses</i>		-1.260 ^{***} (0.110)
<i>Meirelles</i>	0.218 (1.075)	1.644 [*] (0.851)
<i>Tombini</i>	5.673 ^{***} (1.070)	8.582 ^{***} (0.875)
<i>Goldfajn</i>	1.052 (1.205)	1.105 (0.943)
<i>Constant</i>	23.961 ^{***} (1.141)	29.345 ^{***} (1.010)
Observations	220	220
R ²	0.349	0.603
Adjusted R ²	0.305	0.574
Residual Std. Error	4.760 (df = 205)	3.727 (df = 204)
F Statistic	7.856 ^{***} (df = 14; 205)	20.648 ^{***} (df = 15; 204)
<i>Note:</i>	* p<0.1; ** p<0.05; *** p<0.01	

Bibliografia

- ACEMOGLU, Daron et al. When does policy reform work? The case of central bank independence. National Bureau of Economic Research, 2008.
- ALFARO, Laura; KANCZUK, Fabio. Debt redemption and reserve accumulation. IMF Economic Review, v. 67, n. 2, p. 261-287, 2019.
- BEVILAQUA, Afonso S.; GARCIA, Márcio GP. Banks, domestic debt intermediation and confidence crises: the recent Brazilian experience. 1999.
- BLINDER, Alan S. Central-bank credibility: why do we care? How do we build it?. American Economic Review, v. 90, n. 5, p. 1421-1431, 2000.
- CARNEIRO, Dionísio Dias et al. The Structure of the Public Sector Debt in Brazil.
- CUNHA, Pedro Maia da; GARCIA, Márcio GP. A gerência recente do endividamento público brasileiro. Brazilian Journal of Political Economy, v. 32, n. 2, p. 260-281, 2012.
- DU, Wenxin; PFLUEGER, Carolin E.; SCHREGER, Jesse. Sovereign debt portfolios, bond risks, and the credibility of monetary policy. National Bureau of Economic Research, 2016.
- FISCHER, Stanley. Welfare aspects of government issue of indexed bonds. 1982.
- FRANCO, Gustavo HB. A moeda e a lei: Uma história monetária brasileira, 1933-2013. Zahar, 2017.
- GARCIA, Márcio GP; SALOMÃO, Juliana. Alongamento dos títulos de renda fixa no Brasil. Texto para discussão, 2006.
- GARCIA, Márcio et al. The Structure of the Public Sector Debt in Brazil. 1999.
- GARCIA, Márcio Gomes Pinto et al. Economic gains of realized volatility in the Brazilian stock market. Brazilian Review of Finance, v. 12, n. 3, p. 319-349, 2014.
- GOLDEFAJN, Ilan; DE PAULA, Áureo Nilo. Uma nota sobre a composição ótima da dívida pública-reflexões para o caso brasileiro. Texto para discussão, 1999.

- LOWENCRON, Alexandre; GARCIA, Marcio. Monetary Policy Credibility and Inflation Risk Premium: a model with application to Brazilian data. Texto para discussão, 2007.
- LUCAS, Robert E.; SARGENT, Thomas J. After keynesian macroeconomics. Federal reserve bank of Minneapolis quarterly review, v. 3, n. 2, p. 1-16, 1979.
- MISSALE, Alessandro; GIAVAZZI, Francesco; BENIGNO, Pierpaolo. Managing the public debt in fiscal stabilizations: The evidence. National Bureau of Economic Research, 1997.
- OLIVEIRA, Fernando Nascimento; GAGLIANONE, Wagner Piazza. A New Credibility Index for the Central Bank of Brazil using Kalman Filter: Exploring Signals of Inflation Anchoring in the Long-Term
- TAYLOR, John B. et al. Expectations, open market operations, and changes in the federal funds rate. REVIEW-FEDERAL RESERVE BANK OF SAINT LOUIS, v. 83, n. 4, p. 33-48, 2001

Apêndice

Derivação Completa do Modelo

Essa possui power utility e é financiada por uma acumulação de dívida em $t = 0$ de \bar{D} .

$$U(C_2) = \frac{C_2^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Equação 27

O governo pode financiar tal déficit através da emissão de dois tipos de títulos: nominais e indexados D^{ind} . Vale lembrar que o segundo tipo apresenta um retorno real de $R^{ind} = R$. De forma que:

$$Q^n D^n + Q^{ind} D^{ind} = \bar{D}$$

Equação 28

Pode-se normalizar, de modo que tenhamos:

$$Q^n s + Q^{ind} (1 - s) = \bar{D}$$

Equação 29

Onde s representa a proporção total da dívida emitida através dos títulos nominais e Q^i é o preço (custo) do título de tipo i .

Assim como no modelo original, assume-se que a dotação de renda do governo possui distribuição log-normal:

$$X_2 = \bar{X} \exp\left(\frac{x_2}{\bar{X}}\right), \quad x_2 \sim N(0, \sigma), \quad \bar{X} = 1 + \bar{D}$$

Equação 30

O consumo dos gastos governamentais no segundo período deve ser, portanto, equivalente ao seu gasto no período subtraído o pagamento da dívida contraída:

$$C_2(X_2) = X_2 - D_2(X_2)$$

Equação 31

Onde o pagamento é descrito por:

$$D_2(X_2) = D^n \exp(-\pi_2(X_2)) + D^{ind}$$

Equação 32

A qual pode-se reescrever como:

$$D_2(X_2) = s * \exp(-\pi_2(X_2)) + (1 - s)$$

Por fim, apresentamos os investidores. Assume-se que eles possuem time-separable CRRA preferences com uma aversão ao risco γ^* e taxa de desconto δ^* :

$$U^*(C_1^*, C_2^*) = E \left[\sum (\delta^*)^t \frac{(C_t^*)^{1-\gamma^*}}{1-\gamma^*} \right]$$

Os investidores recebem uma dotação no primeiro período, que é totalmente poupada (ou seja, usada para comprar os títulos). Enquanto no período 2, eles recebem $X_2^* = \exp(x_2)$. Seu objetivo é, portanto:

$$\max E_t \left[\sum (\delta^*)^t \frac{(C_t^*)^{1-\gamma^*}}{1-\gamma^*} \right]$$

Sua restrição orçamentária em cada período se dá por:

$$W_{t+1} = (1 + Ret_{p,t+1}) * (W_t - C_t)$$

Tais equações implicam na seguinte condição de primeira ordem:

$$U'(C_t) = E_t \left[\delta^* U'(C_{t+1}) (1 + R_{p,t+1}) \right]$$

Dividindo a equação acima por $U'(C_t)$, temos:

$$1 = E_t \left[\delta^* (1 + Ret_{p,t+1}) \right]$$

Pode-se, ainda, substituir $U'(C_t)$ por $C_t^{-\gamma^*}$. Dessa forma, chegaremos à Equação de Euler para nosso problema:

$$1 = E_t \left[\delta^* \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma^*} (1 + Ret_{p,t+1}) \right]$$

Equação 33

Supondo que o portfólio é composto somente por títulos pós-fixados, que sempre pagam uma taxa real R e portanto indica o mais perto de uma taxa livre de risco que existe nessa economia, ficamos com:

$$1 = E_t \left[\delta^* \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma^*} (1 + R) \right]$$

E portanto, ao substituir C_t e C_{t+1} chegamos ao Fator Estocástico de Desconto (M) da economia:

$$\frac{1}{1 + R} = E_t [\delta^* \exp(-\gamma^* x_2^*)]$$

$$\frac{1}{1 + R} = E[M]$$

Uma vez derivado o Fator Estocástico de Desconto, em equilíbrio, o preço dos títulos deve refletir seu retorno real descontado tal taxa:

$$Q^n = E[M * \exp(-\pi_2(X_2))]$$

Equação 34

$$Q^{ind} = E[M] * 1 = \frac{1}{1 + R}$$

Primeiramente, deve-se notar que M possui distribuição log-normal, portanto:

$$E[M] = \delta^* \exp(E[-\gamma^* x_2^*] + \frac{1}{2} \gamma^{*2} \sigma_2^2)$$

Logo, temos que:

$$\frac{1}{1 + R} = \delta^* \exp\left(\frac{1}{2} \gamma^{*2} \sigma_2^2\right)$$

Substituindo M em Q^n , temos:

$$Q^n = E[\delta^* \exp(-\gamma^* x_2^*) \exp(-\pi_2(X_2))]$$

$$Q^n = \delta^* E[\exp(-\gamma^* x_2^* - \pi_2(X_2))]$$

Equação 35

Sabemos que x_2 e π_2 são conjuntamente normais, e portanto:

$$E[\exp(z)] = \exp\left(E(z) + \frac{1}{2}V(z)\right)$$

Onde $z = -\gamma^* x_2^* - \pi_2(X_2)$. Substituindo, portanto, temos:

$$E[\exp(z)] = \exp\left(E[-\gamma^* x_2^* - \pi_2(X_2)] + \frac{1}{2}Var(-\gamma^* x_2^* - \pi_2(X_2))\right)$$

$$E[\exp(z)] = \exp\left(-E[\pi_2(X_2)] + \frac{1}{2}Var(\gamma^* x_2^* - \pi_2(X_2))\right)$$

Equação 36

Podemos definir a Variância como:

$$Var(-\gamma^* x_2^* - \pi_2(X_2)) = \gamma^{*2} \sigma_x^2 + Var(\pi_2(X_2)) + 2\gamma^* Cov(x_2, \pi_2)$$

Substituindo em (36) ficamos com:

$$\exp\left(-E[\pi_2(X_2)] + \frac{1}{2}(\gamma^{*2} \sigma_x^2 + Var(\pi_2(X_2)) + 2\gamma^* Cov(x_2, \pi_2))\right)$$

Substituindo a equação acima em (35), temos:

$$Q^n = \delta^* \exp\left(-E[\pi_2(X_2)] + \frac{1}{2}(\gamma^{*2} \sigma_x^2 + Var(\pi_2(X_2)) + 2\gamma^* Cov(x_2, \pi_2))\right)$$

Reorganizando, temos

$$Q^n = \frac{1}{1+r} * \exp\left(-E[\pi_2(X_2)] + \frac{1}{2}Var(\pi_2(X_2)) + 2\gamma^* Cov(x_2, \pi_2)\right)$$

Por fim, o preço do título nominal é dado por:

$$Q^n = \frac{1}{1+R} \exp\left(-E[\pi_2] + \frac{1}{2} \text{Var}(\pi_2) + \gamma^* \text{Cov}(x_2, \pi_2)\right)$$

Equação 37

Pode-se definir o prêmio de risco do título nominal por seu excesso de retorno esperado:

$$PR^n = \ln\left(E\left[\frac{-\pi_2}{Q^n}\right]\right) - \ln(1+R)$$

Note que $\ln(1+R) \approx r$

Sabemos que Q^n é constante, logo:

$$PR^n = \ln\left(\frac{1}{Q^n} E[\exp(-\pi_2)]\right) - r$$

Recorrendo mais uma vez às propriedades da distribuição log-normal:

$$PR^n = \ln\left(\frac{1}{Q^n} \exp\left(-E[\pi_2] - \frac{1}{2} \text{Var}(\pi_2)\right)\right) - r$$

Substituindo Q^n na equação:

$$PR^n = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{1+R} \exp\left(-E[\pi_2] + \frac{1}{2} \text{Var}(\pi_2) + \gamma^* \text{Cov}(x_2, \pi_2)\right)} \exp\left(-E[\pi_2] - \frac{1}{2} \text{Var}(\pi_2)\right)\right) - r$$

$$PR^n = \ln\left(\frac{1+R}{\exp(\gamma^* \text{Cov}(x_2, \pi_2))}\right) - r$$

$$PR^n = r - \ln(\exp(\gamma^* \text{Cov}(x_2, \pi_2))) - r$$

Dessa forma, o prêmio de risco é definido por:

$$PR^n = -\gamma^* \text{Cov}(x_2, \pi_2)$$

Equação 38

De volta, agora, à definição da inflação. Anteriormente, definimos π_2 como:

$$\pi_2 = \pi_2(X_2)$$

Substituindo X_2 , temos:

$$\pi_2 = \pi_2\left(\bar{X} \exp\left(\frac{x_2}{\bar{X}}\right)\right)$$

Podemos assumir que π_2 é definida por uma função log-linear de X_2 . Dessa forma, podemos reescrever π_2 como simplesmente:

$$\pi_2 = bx_2$$

Equação 39

Observe que:

$$\bar{X} = 1 + \bar{D}$$

Logo:

$$\bar{X} - \bar{D} = 1$$

Ao mesmo tempo:

$$C_2 = X_2 - D_2$$

Usando a expansão log-quadrática

$\exp(z) - 1 = 1/2 z^2$, temos que:

$$C_2 = C_2 - (\bar{X} - \bar{D})$$

substituindo C_2 :

$$\left[\bar{X} \exp\left(\frac{x_2}{\bar{X}}\right) - D^n \exp(\pi_2) - D^{ind}\right] - (\bar{X} - \bar{D})$$

Reorganizando:

$$\left[\bar{X} \exp\left(\frac{x_2}{\bar{X}}\right) - \bar{X} \right] + [D^n \exp(\pi_2) - D^{ind} + \bar{D}]$$

Equação 40

Observe que o segundo termo da equação pode ser escrito como:

$$D_2 - \bar{D}$$

Além disso, sabemos que D_2 é igual a $R_2 * \bar{D}$. Onde R_2 é o retorno do portfólio de títulos. Para simplificar a derivação, vamos utilizar o excesso de retorno do portfólio XR_2 .

Note que, a taxa livre de risco da economia é justamente a taxa paga pelo título indexado, ou seja excesso de retorno do portfólio de títulos é, naturalmente, igual ao excesso de retorno dos títulos pré-fixados:

$$XR_2 = XR_2^n$$

$$xr_2^n = \ln(XR_2^n)$$

Logo, podemos reescrever (40) como:

$$\left[\bar{X} \exp\left(\frac{x_2}{\bar{X}}\right) - \bar{X} \right] + [\bar{D} \exp(xr_2^d) - \bar{D}]$$

Por fim, temos (41):

$$\bar{X} \left[\exp\left(\frac{x_2}{\bar{X}}\right) - 1 \right] + \bar{D} [\exp(xr_2^d) - 1]$$

Equação 41

Usando a expansão log-quadrática em x_2/\bar{X} :

$$\bar{X} \left[\frac{x_2}{\bar{X}} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{\bar{X}} \right)^2 \right] - \bar{D} [\exp(xr_2^d) - 1]$$

$$\exp(xr_2^d) = \frac{s * \exp(-\pi_2)}{Q^n}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{s * \exp(-\pi_2)}{\exp(-E[\pi_2]) + \frac{1}{2}Var(\pi_2) + \gamma^*Cov(x_2, \pi_2)} \\
 &= s * \exp(-(\pi_2 - E[\pi_2]) - \frac{1}{2}Var(\pi_2) - \gamma^*Cov(x_2, \pi_2)) \\
 &\approx s \left[-(\pi_2 - E[\pi_2]) + \frac{1}{2}(\pi_2 - E[\pi_2])^2 - \frac{1}{2}V(\pi_2) - \gamma^*Cov(x_2, \pi_2) \right]
 \end{aligned}$$

Como sabemos que $E[\pi_2] = bE[x_2] = 0$, temos:

$$\approx s \left[-\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_2^2 - \frac{1}{2}V(\pi_2) - \gamma^*Cov(x_2, \pi_2) \right]$$

Substituindo em (41):

$$\begin{aligned}
 x_2 + \frac{1}{2\bar{X}}x_2^2 - \bar{D} \left[-s\pi_2 + \frac{s}{2}\pi_2^2 - \frac{s}{2}V(\pi_2) \right] - s\gamma^*Cov(x_2, \pi_2) \\
 x_2 + \frac{1}{2\bar{X}}x_2^2 - \bar{D}s\pi_2 - \frac{s\bar{D}}{2}\pi_2^2 + \frac{s\bar{D}}{2}V(\pi_2) + s\gamma^*Cov(x_2, \pi_2)
 \end{aligned}$$

Substituindo $\pi_2 = bx_2$ e $V(\pi_2) = b^2\sigma_x^2$, temos:

$$C_2 - 1 \approx x_2(1 + \bar{D}sb) + \left(\frac{1}{2\bar{X}} - \frac{s\bar{D}b^2}{2} \right) x_2^2 + \frac{s\bar{D}b^2}{2}\sigma_x^2 + sb\gamma^*\sigma_x^2$$

Note que:

$$V(C_2 - 1) = V(C_2)$$

e portanto

$$V(C_2) \approx V \left(x_2(1 + \bar{D}sb) + \left(\frac{1}{2\bar{X}} - \frac{s\bar{D}b^2}{2} \right) x_2^2 + \frac{s\bar{D}b^2}{2}\sigma_x^2 + sb\gamma^*\sigma_x^2 \right)$$

Podemos fazer uma aproximação de primeira ordem dessa expressão de tal modo que:

$$V(C_2) \approx V(x_2(1 + \bar{D}sb))$$

$$V(C_2) \approx (1 + \bar{D}sb)^2 V(x_2)$$

Consequentemente, o desvio padrão será:

$$\sigma_C \approx (1 + \bar{D}sb)\sigma_x$$

De maneira análoga, a expectância de C_2 será:

$$E[C_2] \approx E[x_2(1 + \bar{D}sb) + \left(\frac{1}{2X} - \frac{s\bar{D}b^2}{2}\right)x_2^2 + \frac{s\bar{D}b^2}{2}\sigma_x^2 + sb\gamma^*\sigma_x^2]$$

Note que isso é uma expressão da forma:

$$E[ax + bx^2 + c] = aE[x] + b(V[x] - E[x]) + c$$

E portanto, temos:

$$E[C_2] \approx 0 + \left(\frac{1}{2X} - \frac{s\bar{D}b^2}{2}\right)\sigma_x^2 + \frac{s\bar{D}b^2}{2}\sigma_x^2 + sb\gamma^*\sigma_x^2$$

O que nos leva a:

$$E[C_2] \approx 0 + \frac{1}{2X}\sigma_x^2 + sb\gamma^*\sigma_x^2$$

Equação 42

Descartando as variáveis que não são de interesse, temos:

$$E[C_2] \approx sb\gamma^*\sigma_x^2$$

Equação 43

Dessa forma, o problema do governo se torna:

$$W_n = \max_b \left\{ \frac{s\bar{D}}{2} \gamma b \sigma_x^2 - \frac{\gamma}{2} (1 + \bar{D}sb)^2 \sigma_x^2 \right\}$$

Equação 44